



TITLE:

# OPTIMIZATION PROBLEMS WITH SET-VALUED MAPS(Discrete and Continuous Structures in Optimization)

AUTHOR(S):

前田, 隆

---

CITATION:

前田, 隆. OPTIMIZATION PROBLEMS WITH SET-VALUED MAPS(Discrete and Continuous Structures in Optimization). 数理解析研究所講究録 1996, 945: 16-26

ISSUE DATE:

1996-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60230>

RIGHT:

# OPTIMIZATION PROBLEMS WITH SET-VALUED MAPS

金沢大学経済学部 前田 隆 (Takashi MAEDA)

## 1. はじめに

連続性や微分可能性, 均衡点定理 (不動点定理), 微分包含式 ([1]), さらに最適化問題への応用 ([2],[3]) など, 集合値写像に対する研究者の関心が高まってきた。とりわけ, 数理計画法の分野では, 実数値関数やベクトル値関数は定義域の各点に対してただひとつの要素を対応させる集合値写像とみなすことができるため, 集合値写像を目的写像および制約写像にもつ計画問題が微分不可能な関数やベクトル値関数を統一的に取り扱うひとつの方法として, 幅広い注目を集めている。

本論文の目的は, 集合値写像を目的写像および制約写像にもつ最適化問題, すなわち集合値写像最適化問題に対して非線形計画問題における Kuhn-Tucker 型の最適性の条件を求め, さらに, 与えられた集合値写像最小化問題に対して双対問題 (集合値最大化問題) を定義し, この2つの問題の間に Wolfe タイプの双対定理が成立することを示すことである。

このため, 第2節において, 集合値写像に対して derivative の定義とその基本的な性質を与える。第3節では, 集合値写像最小化問題を定式化し, 最適解を定義する。第4節では, 前節で定義した問題に対して, 最適解の特徴づけを行う。そして, 第5節では, 与えられた集合値最小化問題に対して双対問題 (集合値最大化問題) を定義し, これらの問題の間に Wolfe タイプの双対定理が成立すること示す。

## 2. 数学的準備

ここでは, 以下の議論で用いられる記号, 定義および集合値写像に関する基本的性質を簡単に紹介しよう。

$R^n$  を  $n$ -次元ユークリッド空間,  $R_+^n \equiv \{x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n \mid x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ ,  $R_-^n \equiv -R_+^n$  とする。ただし,  $T$  はベクトル  $x$  の転置である。 $R_+^n$  の内部を  $\text{int } R_+^n$  によって表す。すなわち,  $\text{int } R_+^n \equiv \{x \in R_+^n \mid x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$  である。

ベクトル  $x, y \in R^n$  に対して, その内積を  $\langle x, y \rangle$  とかく。 $R^n$  の2つのベクトル  $x, y$  に対して,  $x - y \in R_+^n$  であるとき,  $x \geq y$  とかき,  $x - y \in \text{int } R_+^n$  であるとき,  $x > y$  とかく。

**Definition 2.1.**  $X, Y$  をそれぞれ  $R^n, R^\ell$  の空でない部分集合とする。各  $x \in X$  に対して,  $Y$  の部分集合を対応させる関係が与えられているとき, この関係を  $X$  から  $Y$  への集合値写像といい,  $F: X \rightsquigarrow Y$  とかく。

通常の写像  $f: R^n \rightarrow R^\ell$  は  $x \in R^n$  に対して, ただひとつの点  $\{f(x)\} \subseteq R^\ell$  を対応させる集合値写像と看做すことができ, 一価写像などとよばれる。

集合値写像  $F: X \rightsquigarrow Y$  が与えられたとき,  $\text{Dom}(F) \equiv \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$ ,  $\text{Range}(F) \equiv \{y \in Y \mid y \in F(x), x \in \text{Dom}(F)\}$ ,  $\text{Graph}(F) \equiv \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$  とお

き, それぞれ  $F$  の有効定義域, 値域, グラフという. 以下では, 一般性を失うことなく,  $X = R^n, Y = R^\ell$  とする.

$F: R^n \rightsquigarrow R^\ell$  が与えられたとき,  $\hat{F}: R^n \rightsquigarrow R^\ell$  を

$$\hat{F}(x) \equiv F(x) + R_+^\ell \equiv \{y + d \in R^\ell \mid y \in F(x), d \in R_+^\ell\}$$

によって定義する. ただし,  $F(x) = \emptyset$  のとき,  $F(x) + R_+^\ell \equiv \emptyset$  である.

$F: R^n \rightsquigarrow R^\ell, G: R^n \rightsquigarrow R^m$  が与えられたとき, 集合値写像  $H \equiv F \times G: R^n \rightsquigarrow R^\ell \times R^m$  および  $\hat{H}: R^n \rightsquigarrow R^\ell \times R^m$  をそれぞれ

$$H(x) \equiv F(x) \times G(x) \equiv \{(y, z) \in R^\ell \times R^m \mid y \in F(x), z \in G(x)\}$$

$$\hat{H}(x) \equiv H(x) + (R_+^\ell \times R_+^m)$$

によって定義する. ただし,  $F(x) = \emptyset$ , あるいは  $G(x) = \emptyset$  であれば,  $H(x) \equiv \emptyset$  である. したがって,  $\text{Dom}(H) = \text{Dom}(\hat{H}) = \text{Dom}(F) \cap \text{Dom}(G)$  である.

**Definition 2.2.**  $F: R^n \rightsquigarrow R^\ell$  は  $\text{Graph}(F)$  が凸集合であるとき, 凸写像であるという<sup>1</sup>.

$F$  が凸写像であれば,  $\hat{F}$  も凸写像である.

**Definition 2.3.**  $F: R^n \rightsquigarrow R^\ell$  は  $\hat{F}$  が凸写像であるとき,  $R_+^\ell$ -凸写像であるという.

**Lemma 2.1.**  $F: R^n \rightsquigarrow R^\ell$  が凸写像であるための必要十分条件は,

$$\lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) \subseteq F(\lambda x + (1 - \lambda)y), \quad \forall x, y \in R^n, \forall \lambda \in [0, 1]$$

が成立することである.

**Definition 2.4.**  $F: R^n \rightsquigarrow R^\ell, (x^\circ, y^\circ) \in \text{Graph}(F)$  とする.  $x^\circ$  のある近傍  $N(x^\circ)$  および正の数  $K$  が存在し, すべての  $x, x' \in N(x^\circ)$  に対して

$$F(x) \subseteq F(x') + K\|x - x'\|B \quad (2.1)$$

が成立するとき,  $F$  は  $x^\circ$  において局所リプシッツ連続であるといい, 実数  $K$  をリプシッツ係数という. ただし,  $B \equiv \{x \in R^\ell \mid \|x\| \leq 1\}$  である.

**Definition 2.5.**  $S$  を  $R^n$  の空でない任意の部分集合,  $x^\circ \in S$  とする. ベクトル  $u \in R^n$  はゼロに収束する正の実数列  $\{t_n\}$  および  $u$  に収束する点列  $\{u^n\}$  が存在し, すべての自然数  $n$  に対して,  $x^\circ + t_n u^n \in S$  が成立するとき,  $S$  の  $x^\circ$  における接ベクトル (tangent vector) といわれる.  $S$  の  $x^\circ$  における接ベクトルの全体からなる集合を接錐 (tangent cone) といい,  $T(S; x^\circ)$  とかく.

<sup>1</sup> $F(x)$  が凸集合のとき,  $F$  は凸値写像といわれる.

**Definition 2.6.**  $S$  を  $R^n$  の空でない任意の部分集合,  $x^\circ \in S$  とする. ベクトル  $u \in R^n$  はゼロに収束する任意の正の実数列  $\{t_n\}$  に対して,  $u$  に収束する点列  $\{u^n\}$  が存在し, すべての自然数  $n$  に対して,  $x^\circ + t_n u^n \in S$  が成立するとき,  $S$  の  $x^\circ$  におけるウルシェスクの接ベクトル (Ursescu's tangent vector) といわれる.  $S$  の  $x^\circ$  におけるウルシェスクの接ベクトルの全体からなる集合をウルシェスク錐 (Ursescu cone) といい,  $T^U(S; x^\circ)$  とかく.

定義から明らかなように, 接錐およびウルシェスク錐は原点を含む空でない閉錐である.

**Lemma 2.2.**  $S$  を  $R^n$  の空でない凸集合とし,  $x^\circ \in S$  とする. このとき,  $T(S; x^\circ)$  は閉凸錐であり,

$$S - \{x^\circ\} \subseteq T(S; x^\circ) = T^U(S; x^\circ)$$

が成立する.

**Definition 2.7.**  $S$  を  $R^n$  の空でない任意の部分集合とし,  $x^\circ \in S$  とする. このとき,

$$N(S; x^\circ) \equiv \{y \in R^n \mid \langle y, x \rangle \leq 0, \forall x \in T(S; x^\circ)\}$$

を  $S$  の  $x^\circ$  における一般化された法錐 (generalized normal cone) という.

**Definition 2.8.**  $F : R^n \rightsquigarrow R^\ell$ ,  $(x^\circ, y^\circ) \in \text{Graph}(F)$  とする. このとき,  $DF(x^\circ, y^\circ) : R^n \rightsquigarrow R^\ell$ ,  $D^U F(x^\circ, y^\circ) : R^n \rightsquigarrow R^\ell$  を

$$v \in DF(x^\circ, y^\circ)(u) \equiv \{v \in R^\ell \mid (u, v) \in T(\text{Graph}(F); (x^\circ, y^\circ))\}$$

$$v \in D^U F(x^\circ, y^\circ)(u) \equiv \{v \in R^\ell \mid (u, v) \in T^U(\text{Graph}(F); (x^\circ, y^\circ))\}$$

によって定義し, それぞれ  $F$  の  $(x^\circ, y^\circ)$  における  $u$  方向の derivative, ウルシェスク derivative という. 特に,  $\text{Graph}(DF(x^\circ, y^\circ)) = \text{Graph}(D^U F(x^\circ, y^\circ))$  が成立するとき,  $F$  は  $(x^\circ, y^\circ)$  において derivable であるという.

$F : R^n \rightsquigarrow R^\ell$  が凸写像であれば, Lemma 2.2 から,  $F$  は任意の  $(x, y) \in \text{Graph}(F)$  において derivable である.

**Definition 2.9.**  $F : R^n \rightsquigarrow R^\ell$ ,  $(x^\circ, y^\circ) \in \text{Graph}(F)$  とする. このとき,  $\partial F(x^\circ, y^\circ) : R^\ell \rightsquigarrow R^n$  を

$$\partial F(x^\circ, y^\circ)(v) \equiv \{u \in R^n \mid (u, -v) \in N(\text{Graph}(F); (x^\circ, y^\circ))\}$$

を  $F$  の  $(x^\circ, y^\circ)$  における  $v$  方向の codifferential という.

つぎの Lemma が成立することは明らかである.

**Lemma 2.3.**  $F : R^n \rightsquigarrow R^\ell$ ,  $G : R^n \rightsquigarrow R^m$ ,  $((x^\circ, y^\circ, z^\circ) \in \text{Graph}(H))$  とする. このとき, 任意の  $u \in \text{Dom}(DH(x^\circ, y^\circ, z^\circ))$  に対して,

$$DH(x^\circ, y^\circ, z^\circ)(u) \subseteq DF(x^\circ, y^\circ)(u) \times DG(x^\circ, z^\circ)(u) \quad (2.2)$$

が成立する. さらに,

(i)  $F$  は  $x^\circ$  において局所リプシッツ連続であり,  $(x^\circ, y^\circ)$  において derivable である

(ii)  $G$  は  $x^\circ$  において局所リプシッツ連続であり,  $(x^\circ, z^\circ)$  において derivable である

のいずれかが成立すれば, 任意の  $u \in \text{Dom}(DH(x^\circ, y^\circ, z^\circ))$  に対して,

$$DH(x^\circ, y^\circ, z^\circ)(u) = DF(x^\circ, y^\circ)(u) \times DG(x^\circ, z^\circ)(u) \quad (2.3)$$

が成立する.

**Lemma 2.4.**  $F : R^n \rightsquigarrow R^\ell$ ,  $G : R^n \rightsquigarrow R^m$ ,  $(x^\circ, y^\circ) \in \text{Graph}(F)$ ,  $(x^\circ, z^\circ) \in \text{Graph}(G)$  とする. このとき, 任意の  $u \in \text{Dom}(D\hat{H}(x^\circ, y^\circ, z^\circ))$  に対して,

$$D\hat{H}(x^\circ, y^\circ, z^\circ)(u) \subseteq D\hat{F}(x^\circ, y^\circ)(u) \times D\hat{G}(x^\circ, z^\circ)(u) \quad (2.4)$$

が成立する. さらに,

(i)  $F$  は  $x^\circ$  において局所リプシッツ連続であり,  $\hat{F}$  は  $(x^\circ, y^\circ)$  において derivable である

(ii)  $G$  は  $x^\circ$  において局所リプシッツ連続であり,  $\hat{G}$  は  $(x^\circ, z^\circ)$  において derivable である

のいずれかが成立すれば, 任意の  $u \in \text{Dom}(D\hat{H}(x^\circ, y^\circ, z^\circ))$  に対して,

$$D\hat{H}(x^\circ, y^\circ, z^\circ)(u) = D\hat{F}(x^\circ, y^\circ)(u) \times D\hat{G}(x^\circ, z^\circ)(u) \quad (2.5)$$

が成立する.

**Lemma 2.5.**  $F : R^n \rightsquigarrow R^\ell$ ,  $(x^\circ, y^\circ) \in \text{Graph}(F)$  とする.  $T(\text{Graph}(F); (x^\circ, y^\circ))$  が凸集合であれば, このとき,  $\text{Range}(DF(x^\circ, y^\circ))$  は  $R^\ell$  の凸集合である.

### 3. 問題の定式化と解の定義

集合値写像  $F : R^n \rightsquigarrow R^\ell$ , および  $G : R^n \rightsquigarrow R^m$  が与えられたとき, つぎの問題を考えよう.

$$(P) \quad \begin{array}{|l} \text{minimize} \quad F(x) \\ \text{subject to} \quad G(x) \cap R_-^m \neq \emptyset \end{array} \quad (3.1)$$

問題 (P) において, 目的写像  $F$  が一価写像であれば, 問題 (P) はベクトル値最小化問題となる. したがって, 問題 (P) に対して, 実行可能解および最適解をつぎのように定義しよう.

**Definition 3.1.**  $(x^o, y^o) \in R^n \times R^\ell$  は,  $y \in F(x^o)$ ,  $G(x^o) \cap R_-^m \neq \emptyset$  であるとき, 問題 (P) の実行可能解であるという.

**Definition 3.2.** 問題 (P) の実行可能解  $(x^o, y^o) \in \text{Graph}(F)$  は,  $y < y^o$  を満たす他の実行可能解  $(x, y)$  が存在しないとき, 問題 (P) の弱パレート最適解であるという.

問題 (P) に関連するつぎの問題を考えよう.

$$(\hat{P}) \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \hat{F}(x) \\ \text{subject to} & 0 \in \hat{G}(x) \end{array} \quad (3.2)$$

$(x^o, y^o) \in R^n \times R^\ell$  は  $y^o \in \hat{F}(x^o)$ ,  $0 \in \hat{G}(x^o)$  であるとき, 問題  $(\hat{P})$  の実行可能解であるという. 実行可能解  $(x^o, y^o)$  は,  $y < y^o$  を満たす他の実行可能解  $(x, y)$  が存在しないとき, 問題  $(\hat{P})$  の弱パレート最適解であるという.

問題 (P) と問題  $(\hat{P})$  の間には, つぎの関係が成立する.

**Theorem 3.1.**  $(x^o, y^o) \in \text{Graph}(F)$  が問題 (P) の弱パレート最適解であるための必要十分条件は,  $(x^o, y^o)$  が問題  $(\hat{P})$  の弱パレート最適解となることである.

#### 4. 必要条件と十分条件

ここでは, 前節で定義した 問題 (P) に対して, ある実行可能解が問題 (P) の弱パレート最適解であるための必要条件および十分条件を与えよう.

**Theorem 4.1.**  $(x^o, y^o) \in \text{Graph}(F)$  を問題 (P) の弱パレート最適解とし,  $z^o \in \hat{G}(x^o) \cap R_-^m$  とする. このとき,

$$D\hat{H}(x^o, y^o, z^o)(u) \cap \text{int } R_-^\ell \times \text{int } R_-^m \neq \emptyset \quad (4.1)$$

を満たす  $u \in R^n$  は存在しない.

**証明**  $(v, w) \in D\hat{H}(x^o, y^o, z^o)(u)$ ,  $v < 0$ , および  $w < 0$  を満たす  $(u, v, w)$  が存在すると仮定しよう. このとき, ゼロに収束する正の実数列  $\{t_n\}$  および  $(u, v, w)$  に収束する点列  $\{(u^n, v^n, w^n)\}$  が存在し, すべての  $n$  に対して

$$y^o + t_n v^n \in \hat{F}(x^o + t_n u^n) = F(x^o + t_n u^n) + R_+^\ell \quad (4.2)$$

$$z^o + t_n w^n \in \hat{G}(x^o + t_n u^n) = G(x^o + t_n u^n) + R_+^m \quad (4.3)$$

が成立する. ゆえに, 各  $n$  に対して,  $d^n \in R_+^\ell$  および  $r^n \in R_+^m$  が存在し, すべての  $n$  に対して,

$$y^o + t_n v^n - d^n \in F(x^o + t_n u^n)$$

$$z^o + t_n w^n - r^n \in G(x^o + t_n u^n)$$

が成立する. このとき, 十分大きなすべての  $n$  に対して,  $y^o + t_n v^n - d^n < y^o$ ,  $z^o + t_n w^n - r^n \leq 0$  であるが, これは  $(x^o, y^o)$  が問題 (P) の弱パレート最適解であることに反する.  $\square$

**Theorem 4.2.**  $(x^o, y^o) \in \text{Graph}(F)$  を問題 (P) の弱パレート最適解,  $z^o \in \hat{G}(x^o) \cap R_-^m$  とし,  $T(\text{Graph}(\hat{H}); (x^o, y^o, z^o))$  は凸集合であるものとする。このとき,

$$\langle \lambda, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \geq 0, \quad \forall (v, w) \in \text{Range}(D\hat{H}(x^o, y^o, z^o)) \quad (4.4)$$

$$(\lambda, \mu) \geq (0, 0) \quad (4.5)$$

を満たすベクトル  $\lambda \in R^\ell$ ,  $\mu \in R^m$  が存在する。さらに,  $P(\text{Range}(D\hat{H}(x^o, y^o, z^o))) = R^m$  であれば,  $\lambda \geq 0$  である。ただし,  $P(\text{Range}(D\hat{H}(x^o, y^o, z^o)))$  は  $\text{Range}(D\hat{H}(x^o, y^o, z^o))$  の  $R^m$  への射影である。

**証明** Lemma 2.5 から,  $\text{Range}(D\hat{H}(x^o, y^o, z^o))$  は凸集合である。ゆえに, Theorem 4.1 から,  $\text{Range}(D\hat{H}(x^o, y^o, z^o))$  と  $\text{int } R^\ell \times \text{int } R^m$  とを分離する超平面が存在する。すなわち, (4.4) および (4.5) を満足する  $\lambda \in R^\ell$ ,  $\mu \in R^m$  が存在する。

さて,  $P(\text{Range}(D\hat{H}(x^o, y^o, z^o))) = R^m$  であると仮定しよう。このとき,  $\lambda = 0$  であれば, (4.4) から,  $\mu = 0$  がえられるが, これは (4.5) に反する。ゆえに,  $\lambda \geq 0$  である。□

$(x^o, y^o, z^o) \in \text{Graph}(\hat{H})$  において  $\lambda \neq 0$  であるとき, 問題 (P) は  $(x^o, y^o, z^o)$  において normal であるという。

**Corollary 4.1.**  $(x^o, y^o) \in \text{Graph}(F)$  を問題 (P) の弱パレート最適解,  $z^o \in \hat{G}(x^o) \cap R_-^m$  とし,  $T(\text{Graph}(\hat{H}); (x^o, y^o, z^o))$  は凸集合であるものとする。このとき, (4.5) および

$$0 \in \partial \hat{H}(x^o, y^o, z^o)(\lambda, \mu) \quad (4.6)$$

を満たすベクトル  $\lambda \in R^\ell$ ,  $\mu \in R^m$  が存在する。

**Corollary 4.2.**  $(x^o, y^o) \in \text{Graph}(F)$  を問題 (P) の弱パレート最適解,  $z^o \in \hat{G}(x^o) \cap R_-^m$  とし,  $T(\text{Graph}(\hat{H}); (x^o, y^o, z^o))$  は凸集合とする。このとき,

- (i)  $F$  は  $x^o$  において局所リプシッツ連続であり,  $\hat{F}$  は  $(x^o, y^o)$  において derivable である
  - (ii)  $G$  は  $x^o$  において局所リプシッツ連続であり,  $\hat{G}$  は  $(x^o, z^o)$  において derivable である
- のいずれかが成立すれば, (4.5) および

$$\langle \lambda, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \geq 0, \quad \forall (v, w) \in \text{Range}(D\hat{F}(x^o, y^o) \times D\hat{G}(x^o, z^o)) \quad (4.7)$$

を満たすベクトル  $\lambda \in R^\ell$ ,  $\mu \in R^m$  が存在する。さらに,  $P(\text{Range}(D\hat{H}(x^o, y^o, z^o))) = R^m$  であれば,  $\lambda \geq 0$  である。

$F$  が  $R_+^\ell$ -凸写像,  $G$  が  $R_+^m$ -凸写像であれば, 任意の  $(x^o, y^o, z^o) \in \text{Graph}(\hat{H})$  において  $T(\text{Graph}(\hat{H}); (x^o, y^o, z^o))$  は凸集合となる。したがって, 以下の corollaries がえられる。

**Corollary 4.3.**  $F : R^n \rightsquigarrow R^\ell$  および  $G : R^n \rightsquigarrow R^m$  はそれぞれ  $R_+^\ell$ -凸,  $R_+^m$ -凸写像とし,  $(x^o, y^o) \in \text{Graph}(F)$  を問題 (P) の弱パレート最適解,  $z^o \in \hat{G}(x^o) \cap R_+^m$  とする。このとき, (4.4), (4.5) および (4.6) を満たすベクトル  $\lambda \in R^\ell$ ,  $\mu \in R^m$  が存在する。さらに,  $P(\text{Range}(D\hat{H}(x^o, y^o, z^o))) = R^m$  であれば,  $\lambda \geq 0$  である。

**Corollary 4.4.**  $(x^o, y^o) \in \text{Graph}(F)$  を問題 (P) の弱パレート最適解,  $z^o \in \hat{G}(x^o) \cap R_+^m$  とし,  $F: R^n \rightsquigarrow R^\ell$  および  $G: R^n \rightsquigarrow R^m$  はそれぞれ  $R_+^\ell$ -凸,  $R_+^m$ -凸写像とする. このとき,

- (i)  $F$  は  $x^o$  において局所リプシッツ連続であり,  $\hat{F}$  は  $(x^o, y^o)$  において derivable である
  - (ii)  $G$  は  $x^o$  において局所リプシッツ連続であり,  $\hat{G}$  は  $(x^o, z^o)$  において derivable である
- のいずれかが成立すれば, (4.5) および (4.7) を満たすベクトル  $\lambda \in R^\ell$ ,  $\mu \in R^m$  が存在する. さらに,  $P(\text{Range}(D\hat{H}(x^o, y^o, z^o))) = R^m$  であれば,  $\lambda \geq 0$  である.

さてつぎに, 問題 (P) のある実行可能解  $(x^o, y^o) \in \text{Graph}(F)$  が弱パレート最適解であるための十分条件を与えよう.

**Theorem 4.3.**  $(x^o, y^o) \in \text{Graph}(F)$  を問題 (P) の実行可能解,  $z^o \in \hat{G}(x^o) \cap R_-^m$  とし,  $\text{Graph}(\hat{H}) - \{(x^o, y^o, 0)\} \subseteq T(\text{Graph}(\hat{H}); (x^o, y^o, z^o))$  が成立するものとする. このとき, (4.7) を満足する  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda \in R^\ell$  および  $\mu \geq 0$ ,  $\mu \in R^m$  が存在すれば,  $(x^o, y^o)$  は問題 (P) の弱パレート最適解である.

**証明**  $(x^o, y^o)$  が問題 (P) の弱パレート最適解でなければ, このとき,  $\bar{y} < y^o$  を満たす問題 (P) の実行可能解  $(\bar{x}, \bar{y})$  が存在する. このとき, 仮定から任意の  $\bar{z} \in G(\bar{x}) \cap R_-^m$  に対して  $(\bar{x} - x^o, \bar{y} - y^o, \bar{z}) \in T(\text{Graph}(\hat{H}); (x^o, y^o, z^o))$  が成立する. すなわち,

$$(\bar{y} - y^o, \bar{z}) \in D\hat{H}(x^o, y^o, z^o)(\bar{x} - x^o)$$

が成立する. このとき, (4.7) を満足するすべての  $\lambda \in R^\ell, \mu \in R^m$  に対して,

$$\langle \lambda, \bar{y} - y^o \rangle + \langle \mu, \bar{z} \rangle < 0$$

が成立するが, これは矛盾. □

**Theorem 4.4.** 問題 (P) において  $F: R^n \rightsquigarrow R^\ell$ ,  $G: R^n \rightsquigarrow R^m$  をそれぞれ  $R_+^\ell$ -凸,  $R_+^m$ -凸写像,  $(x^o, y^o) \in \text{Graph}(H)$  を問題 (P) の実行可能解とする. このとき,

$$\langle \lambda, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \geq 0, \quad \forall (v, w) \in \text{Range}(D\hat{F}(x^o, y^o) \times D\hat{G}(x^o, 0)) \quad (4.8)$$

を満足するベクトル  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda \in R^\ell$  および  $\mu \geq 0$ ,  $\mu \in R^m$  が存在すれば,  $(x^o, y^o)$  は問題 (P) の弱パレート最適解である.

**証明**  $F: R^n \rightsquigarrow R^\ell$ ,  $G: R^n \rightsquigarrow R^m$  が  $R_+^\ell$ -凸,  $R_+^m$ -凸写像であれば,  $\text{Graph}(\hat{H})$  は凸集合である. したがって, Lemma 2.2 から,  $(x^o, y^o, 0) \in \text{Graph}(\hat{H})$  において  $\text{Graph}(\hat{H}) - \{(x^o, y^o, 0)\} \subseteq T(\text{Graph}(\hat{H}); (x^o, y^o, 0))$  が成立する. さて,  $(x^o, y^o)$  が問題 (P) の弱パレート最適解ではないと仮定しよう. このとき,  $\bar{y} < y^o$  を満たす問題 (P) の実行可能解  $(\bar{x}, \bar{y})$  および  $\bar{z} \in G(\bar{x}) \cap R_-^m$  が存在し,  $(\bar{x} - x^o, \bar{y} - y^o, \bar{z}) \in T(\text{Graph}(\hat{H}); (x^o, y^o, 0))$  が成立する. すなわち,

$$(\bar{y} - y^o, \bar{z}) \in D\hat{H}(x^o, y^o, 0)(\bar{x} - x^o)$$

が成立する.  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$  なので,

$$\langle \lambda, \bar{y} - y^o \rangle + \langle \mu, \bar{z} \rangle < 0$$

であるが, これは (4.8) に反する. □



## 5. Wolfe の双対定理

つぎの集合値写像最大化問題 (WDP) を考えよう.

$$\begin{array}{l|l}
 \text{(WDP)} & \begin{array}{l}
 \text{maximize} \quad F(x) + UG(x) \\
 \text{subject to} \quad y \in F(x) \\
 \quad \quad \quad z \in G(x) \cap R_-^m \\
 \quad \quad \quad U \in \mathcal{U} \equiv \{U \in R^{\ell \times m} \mid U \geq 0\} \\
 \quad \quad \quad \text{Range}(D\hat{F}(x, y) + UD\hat{G}(x, z)) \cap \text{int } R_-^\ell = \emptyset
 \end{array}
 \end{array} \tag{5.1}$$

問題 (WDP) は 問題 (P) の双対問題とよばれる. まず, 問題 (WDP) に対して, 実行可能解および最適解の定義を与えよう.

$(x, y, z, U) \in R^n \times R^\ell \times R^m \times \mathcal{U}$  は, 問題 (WDP) の制約条件を満たすとき, 実行可能解であるという. また, 問題 (WDP) の実行可能解  $(x^\circ, y^\circ, z^\circ, U^\circ)$  は,  $y^\circ + U^\circ z^\circ < y + Uz$  を満たす他の実行可能解  $(x, y, z, U)$  が存在しないとき, 問題 (WDP) の弱パレート最適解であるという.

**Lemma 5.1.**  $(x^\circ, y^\circ, z^\circ) \in \text{Graph}(\hat{H})$  とし,  $T(\text{Graph}(\hat{H}; (x^\circ, y^\circ, z^\circ)))$  は凸集合であるものとする. さらに,

- (a)  $F : R^n \rightsquigarrow R^\ell$  は  $x^\circ$  において局所リプシッツ連続であり,  $\hat{F}$  は  $(x^\circ, y^\circ)$  において derivable である
- (b)  $G : R^n \rightsquigarrow R^m$  は  $x^\circ$  において局所リプシッツ連続であり,  $\hat{G}$  は  $(x^\circ, z^\circ)$  において derivable である

のいずれかが成立するものとする. このとき, つぎのことは同値である.

- (i) ある  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda \in R^\ell$  および  $\mu \geq 0$ ,  $\mu \in R^m$  が存在し,  $0 \in \partial \hat{H}(x^\circ, y^\circ, z^\circ)(\lambda, \mu)$  が成立する.
- (ii) ある  $U \in \mathcal{U}$  が存在し,  $\text{Range}(D\hat{F}(x^\circ, y^\circ) + UD\hat{G}(x^\circ, z^\circ)) \cap \text{int } R_-^\ell = \emptyset$  が成立する.

ただし,  $\mathcal{U} \equiv \{U \in R^{\ell \times m} \mid U \geq 0\}$  である.

**証明** 条件 (a), あるいは (b) が満たされるとき, Lemma 2.4 より,

$$D\hat{H}(x^\circ, y^\circ, z^\circ)(u) = D\hat{F}(x^\circ, y^\circ)(u) \times D\hat{G}(x^\circ, z^\circ)(u) \quad \forall u \in \text{Dom}(D\hat{H}(x^\circ, y^\circ, z^\circ))$$

が成立することに注意しよう.

まず, (i) が成立するとき, (ii) が成立することを示そう. Codifferential の定義から,

$$\langle \lambda, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \geq 0, \quad \forall (v, w) \in \text{Range}(D\hat{F}(x^\circ, y^\circ) \times D\hat{G}(x^\circ, z^\circ)) \tag{5.2}$$

が成立する.  $\lambda \geq 0$  なので, 一般性を失うことなく,  $\sum_{i=1}^\ell \lambda_i = 1$  と仮定しよう.  $\ell \times m$  行列  $U$  を  $U \equiv 1\mu^T$  によって定義すると,  $U \in \mathcal{U}$  であり,  $\lambda^T U = \mu^T$  である. ただし,

$1 \equiv (1, 1, \dots, 1)^T \in R^\ell$  である。このとき、(5.2) から、任意の  $v + Uw \in \text{Range}(D\hat{F}(x^o, y^o) + UD\hat{G}(x^o, z^o))$  に対して、

$$\langle \lambda, v + Uw \rangle = \langle \lambda, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \geq 0$$

が成立する。ゆえに、 $v + Uw \notin \text{int } R_-^\ell$  である。

つぎに、(ii) が成立すると仮定しよう。Lemma 2.5 から、 $\text{Range}(D\hat{F}(x^o, y^o) + UD\hat{G}(x^o, z^o))$  は  $R^\ell$  の凸集合である。したがって、分離定理から、ある  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda \in R^\ell$  が存在し、すべての  $(v, w) \in \text{Range}(D\hat{F}(x^o, y^o)) \times \text{Range}(D\hat{G}(x^o, z^o))$  に対して、 $\langle \lambda, v + Uw \rangle \geq 0$  が成立する。 $\mu^T \equiv \lambda^T U$  とおくと、このとき、 $\langle \lambda, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \geq 0$  であり、したがって、 $0 \in \partial \hat{H}(x^o, y^o, z^o)(\lambda, \mu)$  をえる。□

$F : R^n \rightsquigarrow R^\ell$ ,  $G : R^n \rightsquigarrow R^m$  がそれぞれ  $R_+^\ell$ -凸,  $R_+^m$ -凸写像であれば、任意の  $(x^o, y^o, z^o) \in \text{Graph}(\hat{H})$  において、 $T(\text{Graph}(\hat{H}; (x^o, y^o, z^o)))$  は凸集合である。ゆえに、つぎの Lemma がえられる。

**Lemma 5.2.**  $F : R^n \rightsquigarrow R^\ell$  および  $G : R^n \rightsquigarrow R^m$  はそれぞれ  $R_+^\ell$ -凸,  $R_+^m$ -凸写像であり、 $(x^o, y^o, z^o) \in \text{Graph}(\hat{H})$  とする。さらに、

- (a)  $F$  は  $x^o$  において局所リプシッツ連続であり、 $\hat{F}$  は  $(x^o, y^o)$  において derivable である
  - (b)  $G$  は  $x^o$  において局所リプシッツ連続であり、 $\hat{G}$  は  $(x^o, z^o)$  において derivable である
- のいずれかが成立するものとする。このとき、つぎのことは同値である。

- (i) ある  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda \in R^\ell$  および  $\mu \geq 0$ ,  $\mu \in R^m$  が存在し、 $0 \in \partial \hat{H}(x^o, y^o, z^o)(\lambda, \mu)$  が成立する。
- (ii) ある  $U \in \mathcal{U}$  が存在し、 $\text{Range}(D\hat{F}(x^o, y^o) + UD\hat{G}(x^o, z^o)) \cap \text{int } R_-^\ell = \emptyset$  が成立する。

まず、問題 (P) と (WDP) の間に弱双対定理が成立することを示そう。

**Theorem 5.1.** 問題 (P) の任意の実行可能解  $(x, y)$  および  $z \in G(x^o) \cap R_-^m$  に対して、 $T(\text{Graph}(\hat{H}; (x, y, z)))$  は凸集合であり、 $\text{Graph}(\hat{H}) - \{(x, y, 0)\} \subseteq T(\text{Graph}(\hat{H}); (x, y, z))$  が成立するものとする。さらに、

- (i)  $F$  は  $R^n$  上で局所リプシッツ連続であり、 $\hat{F}$  は任意の  $(x, y) \in \text{Graph}(F)$  において derivable である
- (ii)  $G$  は  $R^n$  上で局所リプシッツ連続であり、 $\hat{G}$  は任意の  $(x, z) \in \text{Graph}(G)$  において derivable である

のいずれかが成立するものとする。このとき、 $y < y' + Uz'$  を満たす問題 (P) および問題 (WDP) の実行可能解  $(x, y)$ ,  $(x', y', z', U)$  は存在しない。

**証明**  $(x, y, z, U)$  が問題 (WDP) の実行可能解であれば,  $(x, y)$  は問題 (P) の実行可能解である. さらに, Lemma 5.1 から,  $0 \in \partial D\hat{H}(x, y, z)(\lambda, \mu)$  を満たす  $\lambda \geq 0, \lambda \in R^\ell$  および  $\mu \geq 0, \mu \in R^m$  が存在する. したがって, 任意の  $(v, w) \in \text{Range}(D\hat{F}(x, y) \times D\hat{G}(x, z))$  に対して,  $\langle \lambda, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \geq 0$  が成立する. ゆえに, Theorem 4.3 から,  $(x, y)$  は問題 (P) の弱パレート最適解である. さて,  $y' < y + Uz$  を満たす問題 (P) の実行可能解  $(x', y')$  が存在すると仮定しよう.  $U \geq 0, z \leq 0$  なので, このとき,  $y' < y$  であるが, これは  $(x, y)$  が問題 (P) の弱パレート最適解であることに反する.  $\square$

**Theorem 5.2.**  $(x^\circ, y^\circ) \in \text{Graph}(F)$  を問題 (P) の実行可能解,  $z^\circ \in G(x^\circ) \cap R_-^m$  とする.  $T(\text{Graph}(\hat{H}; (x^\circ, y^\circ, z^\circ)))$  は凸集合であり,  $(x^\circ, y^\circ, 0) \in \text{Graph}(\hat{H})$  に対して  $\text{Graph}(\hat{H}) - \{(x^\circ, y^\circ, 0)\} \subseteq T(\text{Graph}(\hat{H}); (x^\circ, y^\circ, z^\circ))$  が成立するものとする. さらに,

- (i)  $F$  は  $x^\circ$  において局所リプシッツ連続であり,  $\hat{F}$  は  $(x^\circ, y^\circ)$  において derivable である
- (ii)  $G$  は  $x^\circ$  において局所リプシッツ連続であり,  $\hat{G}$  は  $(x^\circ, z^\circ)$  において derivable である

のいずれかが成立するものとする. このとき,  $(x^\circ, y^\circ)$  が問題 (P) の弱パレート最適解であり, 問題 (P) が  $(x^\circ, y^\circ, z^\circ)$  において normal であれば, ある  $U \in \mathcal{U}$  が存在し,  $(x^\circ, y^\circ, z^\circ, U)$  は問題 (WDP) の弱パレート最適解となる.

**証明**  $(x^\circ, y^\circ)$  が問題 (P) の弱パレート最適解であり,  $(x^\circ, y^\circ, z^\circ)$  において normal であれば, Corollary 4.1 から, ある  $\lambda \geq 0, \lambda \in R^\ell$  および  $\mu \geq 0, \mu \in R^m$  が存在し,  $0 \in \partial \hat{H}(x^\circ, y^\circ, z^\circ)(\lambda, \mu)$  が成立する. したがって, Lemma 5.1 から, ある  $U^\circ \in \mathcal{U}$  が存在し,  $\text{Range}(D\hat{F}(x^\circ, y^\circ) + U^\circ D\hat{G}(x^\circ, z^\circ)) \cap \text{int } R_-^\ell = \emptyset$  が成立する. すなわち,  $(x^\circ, y^\circ, z^\circ, U^\circ)$  は問題 (WDP) の実行可能解である.  $y^\circ + U^\circ z^\circ < y' + U' z'$  である問題 (WDP) の実行可能解  $(x', y', z', U')$  が存在すると仮定しよう. このとき,  $(x', y')$  は問題 (P) の実行可能解であり, かつ  $U' z' \leq 0$  である. したがって,  $y^\circ + U^\circ z^\circ < y' + U' z' \leq y'$  が成立するが, これは Theorem 5.1 に反する.  $\square$

最後に  $F$  および  $G$  がそれぞれ  $R_+^\ell$ -,  $R_+^m$ -凸写像であるときに, 弱双対定理および双対定理が成立することを示そう.

**Theorem 5.3.**  $F$  および  $G$  はそれぞれ  $R_+^\ell$ -凸,  $R_+^m$ -凸写像であり,

- (i)  $F$  は  $R^n$  上で局所リプシッツ連続であり,  $\hat{F}$  は任意の  $(x, y) \in \text{Graph}(\hat{F})$  において derivable である
- (ii)  $G$  は  $R^n$  において局所リプシッツ連続であり,  $\hat{G}$  は任意の  $(x, z) \in \text{Graph}(\hat{G})$  において derivable である

のいずれかが成立するものとする. さらに, 問題 (P) の任意の実行可能解  $(x, y)$  および  $z \in G(x^\circ) \cap R_-^m$  に対して,  $\text{Graph}(\hat{H}) - \{(x, y, 0)\} \subseteq T(\text{Graph}(\hat{H}); (x, y, z))$  が成立するものとする. このとき,  $y < y' + Uz'$  を満たす問題 (P) の実行可能解  $(x, y)$  および問題 (WDP) の実行可能解  $(x', y', z', U)$  は存在しない.

**Theorem 5.4.**  $(x^o, y^o) \in \text{Graph}(F)$  を問題 (P) の実行可能解,  $z^o \in G(x^o) \cap R_-^m$  とし,  $(x^o, y^o, 0) \in \text{Graph}(\hat{H})$  において  $\text{Graph}(\hat{H}) - \{(x^o, y^o, 0)\} \subseteq T(\text{Graph}(\hat{H}); (x^o, y^o, z^o))$  が成立するものとする. さらに,  $F$  および  $G$  はそれぞれ  $R_+^\ell$ -凸,  $R_+^m$ -凸写像であり,

(i)  $F$  は  $x^o$  において局所リプシッツ連続であり,  $\hat{F}$  は  $(x^o, y^o)$  において derivable である

(ii)  $G$  は  $x^o$  において局所リプシッツ連続であり,  $\hat{G}$  は  $(x^o, z^o)$  において derivable である

のいずれかが成立するものとする. このとき,  $(x^o, y^o)$  が問題 (P) の弱パレート最適解であり, かつ問題 (P) が  $(x^o, y^o, z^o)$  において normal であれば, ある  $U^o \in \mathcal{U}$  が存在し,  $(x^o, y^o, z^o, U^o)$  は問題 (WDP) の弱パレート最適解となる.

## 参考文献

- [1] Aubin, J.,P, and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 1990.
- [2] Luc, D. T., *Theory of Vector Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, New York, 1989.
- [3] 前田隆 『多目的意思決定と経済分析』 牧野書店 近刊.
- [4] Ursescu, C. *Multifunctions with closed convex graph*, Czechoslovakia Mathematics Journal, vol 25, 438-441, 1975.